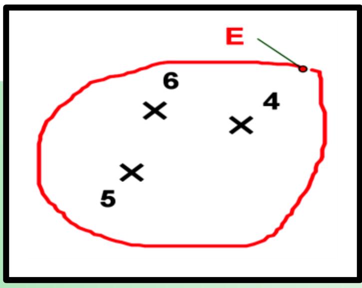
I. Détermination d'un ensemble :

A. Approche – vocabulaire :

Soit l'ensemble E des entiers naturels strictement compris entre 3 et 7 .
Question : écrire cet ensemble de deux façons différentes .



- 1ère façon : $E=\{4,5,6\}$. on dit que E est écrit en extension (**écriture en extension**)
- 2ième façon : $E=\{n\in\mathbb{N}/3<n<7\}$. on dit que E est écrit en compréhension (**écriture en compréhension**) .
- Certain ensemble on peut les représenter de le façon suivante : chaque élément de cet ensemble on l'écrit dans un endroit et à coté de lui on met le symbole $\times$ ou bien $\bullet$ puis on tourne tous les éléments par une ligne et è l'extérieur on écrit le symbole de l'ensemble E la figure obtenue s'appelle **diagramme de Venn**

B. Application :

1. Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

$F=]-5,5[$ - $A=\{0,2,4,6,\cdots\}$

2. Ecrire les ensembles suivants en extension :

$B=\{d\in\mathbb{N}/\exists k\in\mathbb{N},20=k\times d\}$ - $C=\{p\in\mathbb{Z}/(p-3)(2p-5)=0\}$.

II. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION – ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

A. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION :

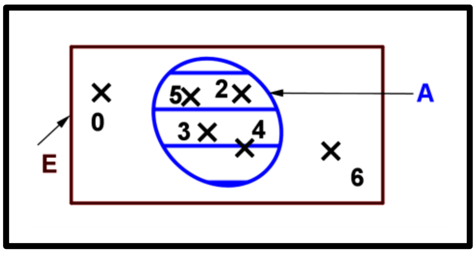
1. L'INCLUSION :

a. Définition :

On dit qu'un ensemble A est un inclus dans un ensemble B si et seulement si tout élément x de A est aussi un élément de B. On note $A\subset B$.

b. Remarque : $A\subset B\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)$.

c. Exemple :



Soient les ensembles $E=\{0,2,3,4,5,6\}$ et $A=\{2,3,4,5\}$.

1. Donner le diagramme de Venn de A et E .

B. Egalité de deux ensembles (OU DOUBLE INCLUSION)

a. Définition :

On dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si $A\subset B$ et $B\subset A$.

b. Remarque : $A=B\Leftrightarrow(A\subset B \text{ et } B\subset A)$. Ou bien $A=B\Leftrightarrow(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$.

c. Exemple :

Soient les ensembles : $F=]0,1[$ et $E=\left\{\frac{1}{x}/x\in\mathbb{R} \text{ et } x>1\right\}$.

Démontrer que : $E=F$.

- **On démontre que :** $E\subset F$.

Soit $y\in E\Rightarrow y=\frac{1}{x}$ et $x>1$

$\Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$

$\Rightarrow 0 < y < 1$

Conclusion 1 : $E \subset F$.

- **On démontre que :** $F \subset E$

Soit :

$y \in F \Rightarrow 0 < y < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \left(\text{on pose } y = \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow x > 1 \text{ et } y = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y \in E$

Conclusion 1 : $F \subset E$

Par suite : $E \subset F$ et $F \subset E$.

Conclusion : $E = F$

C. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

a. Activité :

Soit l'ensemble $E = \{1,2,3\}$. Donner toutes les parties de E.

les parties de E sont : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$.

b. Vocabulaire :

L'ensemble constitué par ses parties c.à.d. $\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

s'appelle ensemble des parties d'un ensemble de E sera noté $\mathcal{P}(E)$.

c. Définition :

E est un ensemble.
Toutes les parties de E constituent un ensemble s'appelle ensemble des parties d'un ensemble de E sera noté $\mathcal{P}(E)$.

d. Remarque :

- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.
- Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont « sous forme des ensembles ».
- $E = \varnothing$ on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$.

e. Exemple :

Ecrire en extension $\mathcal{P}(E)$ tel que : 1) $E = \{2\}$. 2) $E = \{\varnothing\}$. 3) $E = \{1,2\}$. 4) $E = \{\{1,2\}\}$

Réponse :

- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\varnothing,\{2\}\}$
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

- $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\{\{1,2\}\})=\{\varnothing,\{1,2\}\}$.

III. OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES :

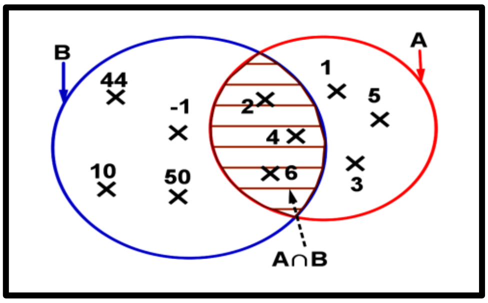
A. INTERSECTION DE DEUX ENSEMBLES :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
Les éléments communs de A et B constituent l' ensembles noté $A\bigcap B$ appelé intersection de A et B
Donc : $A\bigcup B=\{x/x\in A \text{ et } x\in B\}$.

b. Remarque : $x\in A\bigcap B \Leftrightarrow (x\in A \text{ et } x\in B)$.

c. Exemple : soient : $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ et $B=\{-1,2,4,6,44,50\}$



d. Application :

$A=\{p\in\mathbb{Z}/2\le|p|\le 5\}$ déterminer $A\cap\left]-\infty,3\right[$.

e. Propriétés :

A et B et C sont trois ensembles .

- $A\cap\varnothing=\varnothing$ et $A\cap A=A$
- $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$
- $A\cap B=B\cap A$ ($\bigcap$ est commutative)
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$ ($\bigcap$ est associative) .

f. Démonstration : $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

On a :

$$\begin{aligned} x\in(A\cap B)\cap C &\Leftrightarrow x\in A\cap B \text{ et } x\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A \text{ et } x\in B) \text{ et } x\in C\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ et } (x\in B \text{ et } x\in C)(\text{la conjonction}(\text{et}) \text{ est associative})\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ et } x\in A\bigcap B\\ &\Leftrightarrow x\in A\bigcap(A\bigcap B)\end{aligned}$$

Conclusion : $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

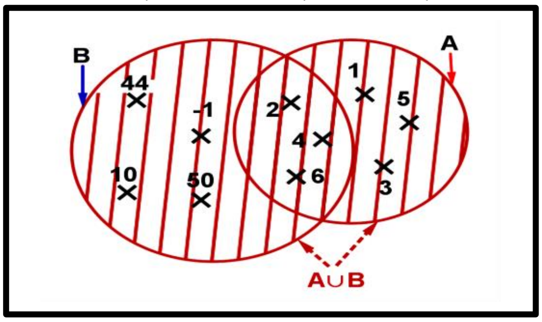
B. L'UNION :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
Les éléments qui appartiennent à A ou à B constituent l' ensembles noté $A\bigcup B$ appelé union de A et B . Donc : $A\bigcup B=\{x/x\in A \text{ ou } x\in B\}$

b. **Remarque :** $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$.

c. **Exemple :** soient : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,44,50\}$



d. **Propriétés :**

A et B et C sont trois ensembles .

- $A \cup \varnothing = A$ et $A \cup A = A$
- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $\cup$ est commutative : $A \cup B = B \cup A$.
- $\cup$ est associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
- $\cup$ est distributive sur $\cap$: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \end{cases}$

e. **Application :**

Démontrer que : $\cap$ est distributive sur $\cup$.

- On montre que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ‘ la distributivité à gauche de $\cap$ sur $\cup$.

On a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ (la conjonction est distrubitive sur la disjonction)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Conclusion 1 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- On montre que : $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ ‘ la distributivité à gauche de $\cap$ sur $\cup$.

On a :

$$\begin{aligned} (B \cup C) \cap A &= A \cap (B \cup C) \quad (\cap \text{ est commutative}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ (d'après la conclusion 1)} \\ &= (B \cap A) \cup (C \cap A) \quad (\cap \text{ est commutative}) \end{aligned}$$

Conclusion 2 : $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

Conclusion l’intersection **est distributive sur** l’union .

C. Partie complémentaire :

a. **Définition :**

A est une partie d'un ensemble E $(A \subset E)$.

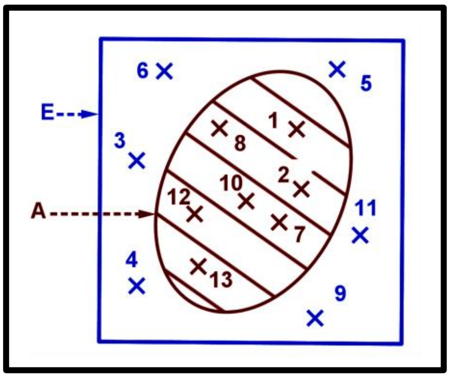
L'ensemble B qui contient tous les éléments de E et qui n'appartiennent pas à la parie A s'appelle la partie complémentaire de A dans E, on note $B = \complement_E^A$ ou encore $B = \overline{A}$.

Donc : $B = \complement_E^A = \{x \in E / \ x \notin A\}$

b. Remarques :

- $x \in C_E^A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$.
- $x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$

c. Exemples :



- soient :

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ et $A = \{1,2,7,8,10,12,13\}$

on a $A \subset E$ d'où : $\complement_E^A = \{3,4,5,6,9,11\}$.

- $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}^{-*}$ et $C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} =]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

d. Propriétés :

E est un ensemble .

- $C_E^{\varnothing} = E$ et $C_E^E = \varnothing$.
- $\overline{\overline{A}} = A$ c.à.d. $C_E^{C_E^A} = A$.
- $A \cap \overline{A} = A \cap C_E^A = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = A \cup C_E^A = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

e. Démonstration :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Rappel : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in E \cap E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \qquad ; (E \cap E = E) \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Conclusion : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Rappel : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

On a :

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B}$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

Conclusion : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

D. La différence de deux ensembles :

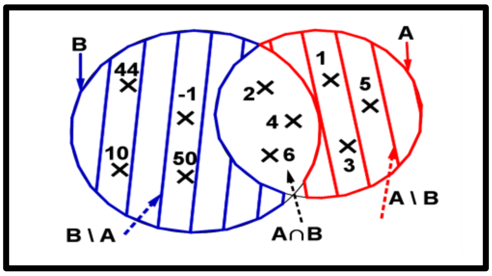
a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
Les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B constituent l' ensembles qui est noté $A \backslash B$ appelé différence de l'ensemble A et l'ensemble B (l'ordre est important) .
Donc : $A \backslash B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

b. Remarque : $x \in A \backslash B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$.

c. Exemple : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,10,44,50\}$

On a : $A \backslash B = \{1,3,5\}$ et $B \backslash A = \{-1,10,44,50\}$.



d. Exercice :

Déterminer : $A \backslash B$ puis $B \backslash A$ avec :

- $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}^*$.
- $A = \mathbb{R}$ et $B = [1,5[$

E. La différence symétrique :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
La différence symétrique de A et B est l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
Donc : $A \Delta B = \{x / (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}$

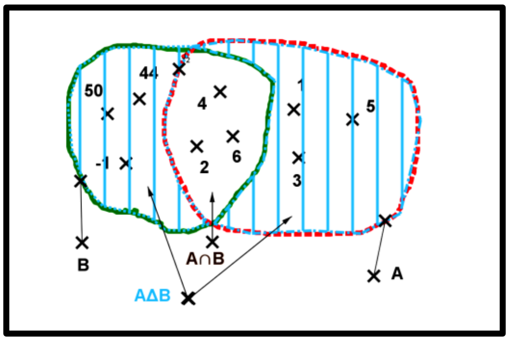
b. Remarques :

- $A \Delta B = B \Delta A$.
- $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
- $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B$

Exemple : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,10,44,50\}$

- On représente $A \cap B$ et $A \Delta B$ par un diagramme de Venn

On a : $A \Delta B = \{1,3,5,-1,44,50\}$ et $A \cap B = \{2,4,6\}$.



F. Produit cartésien de deux ensembles :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ qui est constitué par tous les couples (x, y) tel que $x \in A$ et $y \in B$ ..

Donc : $A\times B=\{(x,y)/x\in A \text{ et } y\in B\}$

b. Remarques :

- $(x,y)\in A\times B \Leftrightarrow (x\in A \text{ et } y\in B)$
- $E\times\varnothing=\varnothing\times E=\varnothing$.
- $A\times B\neq B\times A$ (en général)
- Si $A=B$ on note : $A\times A=A^2$
- $B\times A=\{(x,y)/x\in B \text{ et } y\in A\}$

c. Exemple : $A=\{1,2\}$ et $B=\{a,b,c\}$

- On représente $A\cap B$ et $A\Delta B$ par un diagramme de Venn

On a : $A\times B=\{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);(2,b);(2,c)\}$.

d. Application :

1. Ecrire en extension $E\times F$ tel que : $E=\{1,2\}$ et $F=\{1,2,3\}$.

2. $A\subset E$ et $B\subset F$. Montrer que : $(A\subset E \quad B\subset F)\Rightarrow A\times B\subset E\times F$.

e. Généralisation :

1. E_1 et E_2 et E_3 sont trois ensembles .

- $x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ et $x_3\in E_3$ l'écriture (x_1,x_2,x_3) s'appelle le triplet est un élément de l'ensemble qui est noté $E_1\times E_2\times E_3$, on l'appelle produit cartésien de E_1 et E_2 et E_3 dans cet ordre .
- $E_1\times E_2\times E_3=\{(x,y,z)/x\in E_1 \text{ et } y\in E_2 \text{ et } z\in E_3\}$.

Cas général :

2. On considère les ensembles E_i avec $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$.

- le produit cartésien de E_1 et E_2 et E_3 et ….et E_n dans cet ordre est l'ensemble qui est noté $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ ou encore $\prod_{j=1}^{j=n}E_j$.
- Les éléments de $\prod_{j=1}^{j=n}E_j$ sont notés par $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ chaque élément s'appelle $n-$uplet avec $x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ et $x_3\in E_3$ et ….et $x_n\in E_n$.
- $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in\prod_{j=1}^{j=n}E_j \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$

  $\Leftrightarrow x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ et ….et $x_n\in E_n$ (ou $x_i\in E_i$, $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$)
- Cas particulier : $E_1=E_2=\cdots=E_n=E$ on note $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=E^n$
- Exemple: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ d'où le triplet $(2,-5,\sqrt{7})$ est un élément de $\mathbb{R}^3$ on écrit $(2,-5,\sqrt{7})\in\mathbb{R}^3$